

〈原 著〉

得点先取方式の球技の試合における確率計算の方法

—一定式化とバレーボールの試合への応用—

廣津 信義*・濱野 光之**

A method for calculating probabilities in ballgames under n-point-up scoring system:

A formulation and its application to volleyball games

Nobuyoshi HIROTSU* and Koji HAMANO**

Abstract

In this paper, we propose a method for calculating the probability of ballgames reaching scores of $i-j$ and the probability of winning from scores of $i-j$ under n-point-up scoring system. We show a mathematical formulation which shows the progress of the score in terms of tennis, table tennis, badminton and volleyball. We also demonstrate how to calculate these probabilities using a spreadsheet, which makes it possible to obtain these probabilities without any special knowledge of computer programming. As an application of this method, we calculate the winning probability and the number of plays in a volleyball game, not only under the rally-point system, but also under the side-out system, and compare these systems numerically.

Key words: ballgame, formulation, probability, scoring system, volleyball

1. 緒 言

本論文では、球技の試合を数学モデルに基づいて表現した上で、試合の経過を確率計算する方法について述べる。球技の試合形式としては、テニスや卓球のように得点の先取を争う方式と、サッカーやハンドボールのような試合時間内での得点数の多寡を争う方式に大別できるが、ここでは、前者の得点先取方式の試合について得点する確率（以下、「得点確率」）を基に計算を進めることで、得点 i 対 j となる確率や、得点 i 対 j から勝つ確率を計算する方

法について述べる。

一般に数学モデルを用いた試合の経過の分析においては、しばしば複雑な数式を計算機プログラムを利用して数値計算しその結果を分析するという作業が行われる。しかしながら、このような分析作業を把握するためには、数式の理解のみならず、計算機プログラミング技術や数値計算手法の習熟が必要となる。また、得てして計算技術に囚われ過ぎたり、必要以上に複雑な数学モデルを作成し、結果を直感的に把握できない状況に陥ることもあり得る。

そこで、本研究では計算のためのツールとして汎用の表計算ソフトを用い、テニス、卓球、バドミントン、バレーボールという代表的な得点先取方式の試合について、数学的な定式化ならびに表計算方法を例示した。試合の数学モデル化についての研究

* 統計学研究室
Seminar of Statistics

** バレーボール研究室
Seminar of Volleyball

は、竹内・藤野⁹⁾が n 点先取方式における勝つ確率の解析的な計算式を 2 項分布を基に導出している。ただし、サーブの有利不利の影響までは数式に考慮はされていない。宮川・鳩山⁴⁾はサーブ権まで考慮した数式を提示しており、またデュースやタイブレークの単独での計算式を示しているものの、デュースとサーブ権両方を織り込んだ形での計算式までは提示していない。個別の競技についての数学的な計算方法についてはいくつかの文献¹⁾²⁾⁵⁾⁶⁾⁸⁾¹⁰⁾で見られるものの、得点先取方式の競技を横断的に数学モデル化し、後述するような“なる確率”と“とる確率”とを併記した形で定式化した文献は見当たらない。また、計算機プログラムを開発して数値計算するのではなく、汎用の表計算ソフトで計算結果を求めている点でも新たな試みといえる。さらに、本研究では応用事例として、バレーボールにおけるラリーポイント制とサイドアウト制での試合の比較検討を試みた。両制度の比較として、実際の試合結果から長さの違いを検討した事例などいくつかの研究²⁾³⁾は見られるものの、数学的に試合の長さの確率分布を導出して比較した文献は見当たらない。本論文では、両制度について勝つ確率や試合の長さを確率計算し比較した結果についても述べる。

当然、今回提示している数学モデルは、選手のコンディションや精神面などの要因は無視しており、単に得点する確率を基に計算するために定式化したものであり、現実を完全に反映できるわけではない。しかしながら、数値的に検討できる上、論理的に進めばどうなるかという予測が可能となるため、将来は意思決定のためのガイダンスツールになり得ると考えている。また、数学モデルにて試合の経過が表計算ソフトの操作で確率計算することが可能になると、通常計算機プログラムに関する高度な知識までは必ずしも必要とはされていない監督・コーチも自らが表計算方法を工夫し、試合中にリアルタイムで随時確率計算をしながら戦略を策定することが実現するかもしれない。今後、球技の試合を研究する際の一つの手法として利用されることを願っている。

2. 方 法

2.1 “得点 $i-j$ になる確率” の計算

テニスや卓球などは、ある点数を先取した方がセットをとるという形式となっており、テニスのゲームは 4 点先取、卓球のセットは 11 点先取となっている。本節では、このような得点先取方式において双方の得点が i 対 j になる確率（以下、「得点 $i-j$ になる確率」）の計算について述べる。

まず、選手 A と B の対戦について A の得点確率を p_A とする。 $P(i, j)$ を A, B の得点がそれぞれ i, j になる確率とすると、試合は $0-0$ から確実に（確率 1 で）始まるので、 $P(0, 0) = 1$ が初期条件となる。得点 $1-0$ となる確率 $P(1, 0)$ は、最初に A が得点する確率に等しく、 $P(1, 0) = p_A \times P(0, 0) = p_A \times 1 = p_A$ となる。B の得点確率を $q_A (= 1 - p_A)$ として同様に考えると、得点 $i-j$ になる確率 $P(i, j)$ は、A が得点 $i-1$ 対 j から得点するか、B が得点 i 対 $j-1$ から得点すると実現するので、 $P(i-1, j)$ と $P(i, j-1)$ から計算できる。すなわち、

$$P(i, j) = p_A P(i-1, j) + q_A P(i, j-1) \quad (1)$$

となる。4 点先取の場合 (1) 式を表計算に反映させると図 1 のようになる。図 1 では右方向に A の得点の加算を、下方向に B の得点の加算を表すように配置されている。最初に得点 $0-0$ に相当するセルに 1 を代入し、それと隣接するセルに (1) 式に相当する計算式を打ち込み、そのセルを図 1 で薄く着色したセル（以下、「薄塗セル」）に「コピー」「貼り付け」するとよい。なお、A, B どちらかが 4 点先取したら終了となり、その時の得点に応じた太枠のセル内にその得点で終了する確率が示されている。なお、太枠のセルは境界に当たるため計算式は $P(i, j) = p_A P(i-1, j)$ ないしは $P(i, j) = q_A P(i, j-1)$ となる。

ここで、 n 点先取の試合では、その 1 点手前で同点 ($n-1$ 対 $n-1$) になった場合（いわゆる“デュース”の場合）は特別の扱いが必要となる。通常、デュース以降は 2 点先行した選手が勝ちとなるが、表計算上でこれを直接表現しようとする、デュース

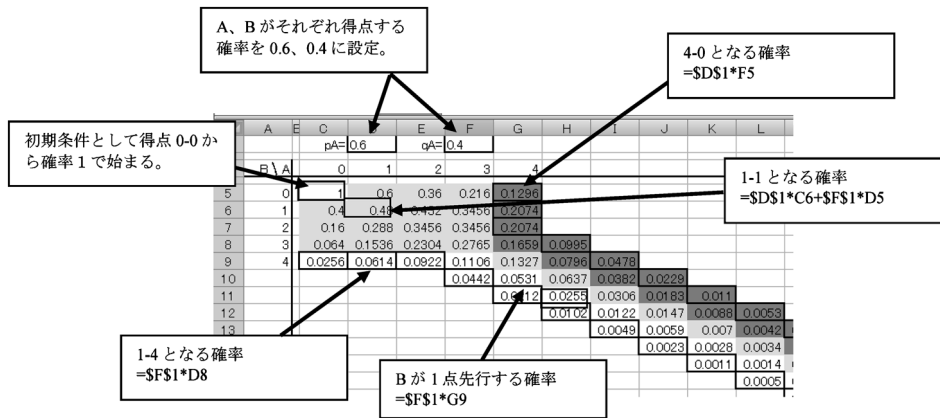


図1 4点先取方式の得点i-jになる確率の表計算の例

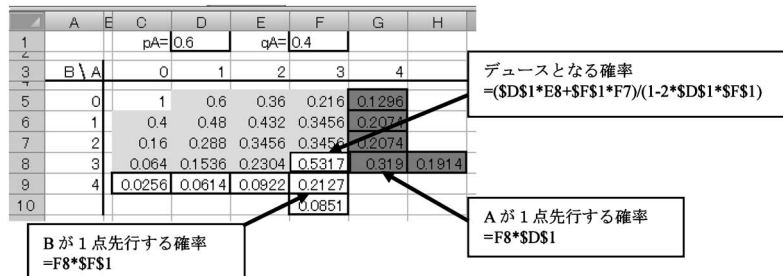


図2 4点先取方式の得点i-jになる確率の表計算の例(デュースをまとめた場合)

以降の得点を例えば図1のように右下に伸ばしていくことで可能となる。この方法は、デュースの繰り返しを含めて得点の経過を明示できるという利点があるものの、低い確率でしか起こらない事象を右下に延々と伸ばすことで表現するという煩わしさが伴うという欠点がある。

もし表示を右下に延々と伸ばすことを回避したければ、例えば、デュース以降の2点先行の部分の数式を別扱いとすればよい。すなわち、デュースになる確率を P_d 、Aが1点先行する確率を P_{d+1} 、1点先行される確率を P_{d-1} とおくと、それらの関係は

$$\begin{aligned}
 P_d &= p_A P(2, 3) + q_A P(3, 2) + q_A P_{d+1} + p_A P_{d-1} \\
 P_{d+1} &= p_A P_d \\
 P_{d-1} &= q_A P_d
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

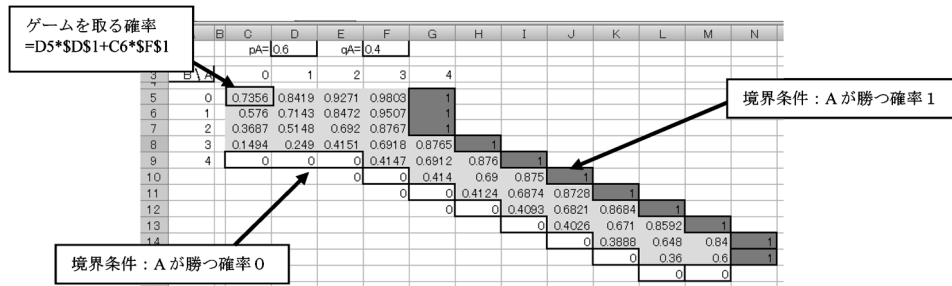
という連立一次方程式で表現できるので、これから、 $P_d = \{p_A P(2, 3) + q_A P(3, 2)\} / (1 - 2p_A q_A)$ と計算することができる。これを表計算に反映させると図2に示すようになり、デュース、1点先行、1点後

退の確率をそれぞれ一つだけのセルで表現でき、右下へ伸びる部分を省略できる。

2.2 “得点i-jから勝つ確率”の計算

前節では、“得点i-jになる確率”の計算方法を示したが、本節では“得点i-jから勝つ確率”の計算方法について述べる。本来ならば“勝つ”と記すと試合に勝つことを意味するが、ここではn点先取することを勝つ確率と呼ぶこととする。すなわち、テニスの場合は0-0から4点先取で“ゲーム”を取る確率を、バドミントンの場合は21点先取で“ゲーム”を取る確率などをここでは総称して勝つ確率と呼ぶこととする。

前節同様に、選手AとBの対戦でA、Bの得点確率をそれぞれ p_A, q_A とし、 $P_w(i, j)$ を得点i-jから勝つ確率とする。この場合はn点先取したら勝ちとなるので得点がn対0, n対1, ..., n対n-2の状態ではAは確率1で勝ちとなる。よって境界条件として $P_w(n, 0) = P_w(n, 1) = \dots = P_w(n, n-2) = 1$ と

図3 4点先取方式の得点*i-j*から勝つ確率の表計算の例

なる。逆に、得点0対*n*, 1対*n*, ..., *n-2*対*n*の状態ではAは負け(勝つ確率0)となるので境界条件は $P_w(0, n) = P_w(1, n) = \dots = P_w(n-2, n) = 0$ となる。一般に、得点*i-j*の次の状態は、確率 p_A でAが得点して*i+1*対*j*となるか、確率 q_A でBが得点して、*i*対*j+1*となる。このとき、それぞれの状態の勝つ確率の関係は、

$$P_w(i, j) = p_A P_w(i+1, j) + q_A P_w(i, j+1) \quad (3)$$

となる。4点先取の場合(3)式を表計算に反映させると図3のようになる。すなわち、初めに境界条件として*n*対0, *n*対1, ..., *n*対*n-2*に対応する太枠セルに1を、0対*n*, 1対*n*, ..., *n-2*対*n*に対応する太枠セルに0を代入しておき、隣接しているセルに(3)式に相当する計算式を打ち込み、そのセルを図3の薄塗セルに「コピー」「貼り付け」すればよい。デュースの取り扱いへの配慮が前節同様に必要になるが、図3では右下にデュース以降の得点を右下に伸ばすことで表現している。境界条件を決めてから計算するので、便宜上右下端の部分で繰り返しを打ち切らざるを得ないため、計算の打ち切り誤差の影響を無視できる程度まで右下に伸ばしておく必要がある。

3. 様々な競技へのアレンジ

本節ではテニス、卓球、バドミントン、バレーボールについて前節の定式化をアレンジし、表計算する方法を個別に例示する。なお、各競技の試合形式については文献⁷⁾を参考にした。

3.1 テニス

テニスは、4点先取の“ゲーム”を基本として6

ゲーム先取でセットを獲得し、3セットマッチないしは5セットマッチで争われる。すなわち、形式的には*n*点先取方式を3つ重ねた試合形式となっている。(タイブレークまで考慮すると4つ重ねた形式とも言える。)

始めに、ゲーム内で得点*i-j*になる確率の計算について述べる。AがサービスのときのAの得点確率を p_A とし、ゲーム内で得点*i-j*になる確率を $P(i, j)$ とすると、ゲームは4点先取なので2.1節の例と同じで $n=4$ で考えればよい。具体的には既に図1と図2で示した方法で表計算できる。(ただし、実際のテニスの試合では得点は1, 2, 3ではなく15, 30, 40と数えることとなる。) Aの得点確率が $p_A = 0.6$ の時、Aがゲームを取る確率 p_{AG} は、図1でAの先取に相当する濃く着色された太枠セルの部分合計すると $p_{AG} = 0.736$ となる。(図3の $P_w(0-0)$ から計算できる。) 同様にして、Bがゲームを取る確率は $p_{BG} = 0.264$ と算出できる。ちなみに、BのサービスゲームでのBの得点確率を p_B と表すと、 $p_B = 0.7$ のときBがゲームを取る確率は $p_{BG} = 0.901$ と計算できる。

セット内でゲームカウント*i-j*になる確率の計算については、*n*点先取方式において $n=6$ とし、Aの得点確率 p_A をゲームを取る確率 p_{AG} に置き換えればよい。サーブはゲーム毎に交代するので、BがサーブのときにBがゲームを取る確率 p_{BG} をBの得点確率 p_B から計算しておく必要がある。6ゲーム先取の表計算については図4に示すように、隣接するセルがそれぞれA, B双方のサービスゲームのときの計算式が交互に並ぶように配置するとよ

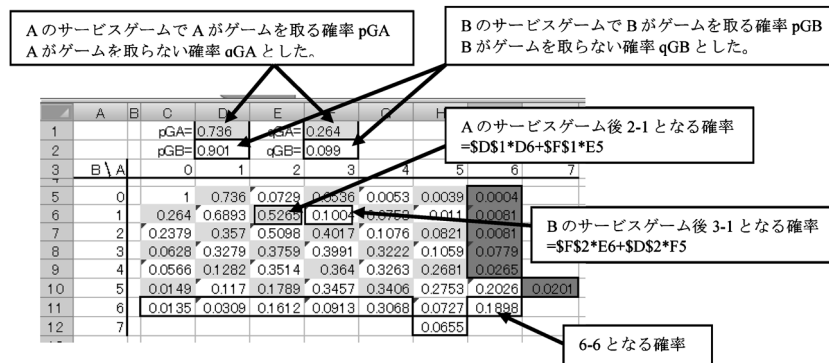


図4 テニスのセットでゲームカウント i-j となる確率の表計算の例

い. すなわち, $P_G(i, j)$ をゲームポイント i-j となる確率とした時, A のサービスゲームでは

$$P_G(i, j) = p_{AG}P_G(i-1, j) + q_{AG}P_G(i, j-1) \quad (4)$$

となり, B のサービスゲームでは

$$P_G(i, j) = p_{BG}P_G(i, j-1) + q_{BG}P_G(i-1, j) \quad (5)$$

となる. ただし, $q_{AG} = 1 - p_{AG}$, $q_{BG} = 1 - p_{BG}$ であり, 図4ではA, Bがサービスゲームを取る確率をそれぞれ $p_{AG} = 0.756$, $p_{BG} = 0.901$ としている. 薄塗セルにはAのサービスゲームの後に, 無色セルにはBのサービスゲームの後にそれぞれゲームカウント i-j となる計算式が代入されている ($i, j \leq 5$ について). ゲームカウント 6-6 となった場合, それ以降は通常7点先取のタイブレークとなるが, 後述する卓球のようにサーブが2本交代になる点を配慮して, タイブレーク内における得点 i-j になる確率を計算できる (ただし, テニスではタイブレークでは最初は1本で交代する点を反映する必要がある.) ウィンブルドン大会のように5セット目が2ゲーム先行の場合は, 5セット目についてのみ, 6-6以降はデュースの場合と同様に右下に繰返しを伸ばしていく方法により計算すればよい.

試合においてセットカウント i-j になる確率は, 既に計算されたA, Bがセットを取る確率を基に, 2セット先取の場合は $n=2$, 3セット先取の場合は $n=3$ として同様に計算すればよい.

次に, 勝つ確率の計算について述べる. これも形

式的には n 点先取方式が3段階 (タイブレークも入れると4段階) となっていることを利用して計算できる.

まず, ゲーム内において得点 i-j からゲームを取る確率について考える. $P_{wG}(i, j)$ を得点 i-j からAがゲームを取る確率, p_A をAがサーブのときのAの得点確率とすると, (3)式で $P_w(i, j) = P_{wG}(i, j)$ と置き換えて考えればよい. 具体的には既に図3で示した方法で表計算できる.

セット内についてゲームカウント i-j から勝つ確率の計算は, n 点先取方式において $n=6$ とし, Aのサービスゲームでは得点確率 p_A をゲームを取る確率 p_{AG} に置き換え, BのサービスゲームではBがゲームを取る確率 p_{BG} を利用すればよい. すなわち, Aがゲームカウント i-j からセットを取る確率を $P_{ws}(i, j)$ とすると, Aのサービスゲームのとき(3)式で p_A を p_{AG} に q_A を q_{AG} に $P_w(i, j)$ を $P_{ws}(i, j)$ に置き換えて考えればよい. 6ゲーム先取の表計算については図5に示すように, 図4と同様に, 隣接するセルにそれぞれA, B双方のサービスゲームのときの計算式を代入するとそれらが交互に並ぶように配置される. すなわち, Aのサービスゲームでは

$$P_{ws}(i, j) = p_{AG}P_{ws}(i+1, j) + q_{AG}P_{ws}(i, j+1) \quad (6)$$

となり, Bのサービスゲームでは

$$P_{ws}(i, j) = p_{BG}P_{ws}(i, j+1) + q_{BG}P_{ws}(i+1, j) \quad (7)$$

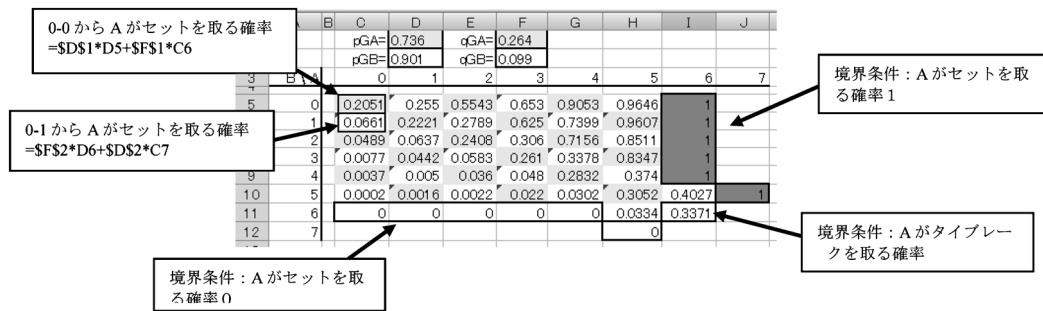


図5 テニスでゲームカウント i-j からセットを取る確率の表計算の例

となる. 図5ではA, Bがサービスゲームを取る確率をそれぞれ $p_{AG} = 0.756$, $p_{BG} = 0.901$ として計算しており, 薄塗セルはAのサービスゲームで, 色なしのセルはBのサービスゲームでゲームカウント $i-j$ からAがセットを取る確率の計算式が代入されている ($i, j \leq 5$ について).

また, 6-6でタイブレークとなった場合も, サーブを2本交代することに配慮して同様に表計算すればよい. 詳述はしないが $p_A = 0.6$, $p_B = 0.7$ の時, 7点先取のタイブレークをAが取る確率は0.3371となるので, これを図5の境界条件の右下部のセルに代入すると, Aがセットを取る確率は図5のゲームカウント0-0のところに表示される. 試合に勝つ確率は, A, Bがセットを取る確率を基に, 2セット先取ないしは3セット先取として表計算すればよい.

3.2 卓球

卓球は11点先取のセットを3, 5ないしは7セットマッチで争う. すなわち, 形式的には n 点先取方式が2段階となっている.

まず, セット内で得点 $i-j$ になる確率について述べる. 選手AとBの対戦について, $P(i, j)$ を得点 $i-j$ となる確率, p_A をAがサービスのときAが得点する確率とすると, 2.1節の定式化において $n = 11$ と考えるとよい. 11ゲーム先取の表計算については図6に示すように, サーブが2本交代で行うことを反映させるため, Aがサーブの時は(1)式に相当する計算式を, Bがサーブの時はBの得点確率 p_B を(1)式の p_A と置き換え ($q_B (= 1 - p_B)$ も q_A

と置き換え) た計算式とし, それらが2セルずつ交互に並ぶように配置するとよい. また, 得点10-10以降はサーブは1本交代となるので, この点を考慮した上で2点先行した方がセットをとるように表計算する必要がある. セットの取り合いについては, テニスの場合と同様に考えればよい.

得点 $i-j$ から勝つ確率(セットを取る確率)についても同様に計算できる. すなわち, 2.2節の定式化で $n = 11$ とにおいて, (3)式の $P_w(i, j)$ を得点 $i-j$ からAがセットを取る確率 $P_{ws}(i, j)$ に置き換え, p_A をAがサービスのときAが得点する確率として計算すればよい. BがサービスのときはBの得点確率 p_B を p_A と置き換えた計算式とすればよい. 図7では, 薄塗セルと色なしのセルで計算式の違いを表わしている. なお, 図7の例では, $p_A = 0.6$, $p_B = 0.5$ の場合を計算しており, Aがセットを取る確率は $p_{ws} = 0.6878$ となっている.

3.3 バドミントン

バドミントンは, 21点先取のゲームを3ゲームマッチで争う試合形式となっている. バレーボールと同じようにラリーポイント制で, サーブ側が得点すると続けてサーブできるが, レシーブ側が得点するとレシーブ側が次にサーブするというようにサーブを交代する. サーブ側かレシーブ側かで得点確率が異なるとして計算する場合は, 後述するバレーボールのようにサーブ権を考慮した形で表計算する必要があるが, サーブ側か否かで顕著な違いはないと判断するならば, 2.1節と2.2節に示したようなサーブ側か否かは考慮しない形で単純に n 点先取方式が2

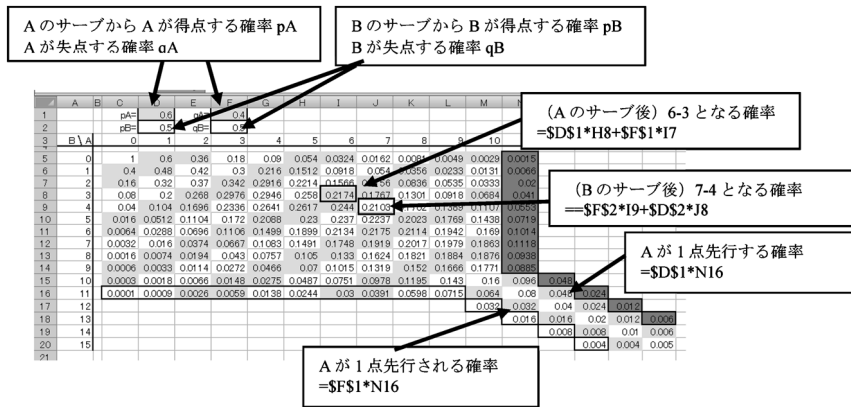


図6 卓球のセットで得点*i-j*となる確率の表計算の例

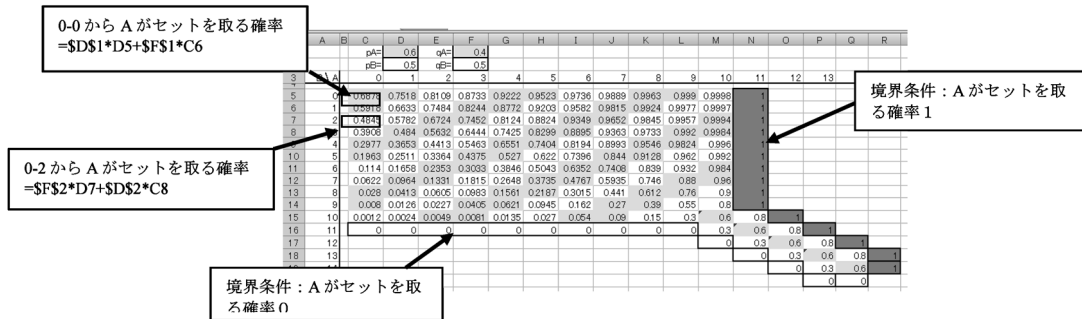


図7 卓球で得点*i-j*からセットを取る確率の表計算の例

段階となっていると考えて表計算すればよい。

なお、セットの先取については $n=21$ で考えればよく、デュース以降は2点先行だけでなく30点を先取した方がセットを取ることができるので、図1で右下に伸びる繰り返しは30点まで続けられればよい。

3.4 バレーボール

バレーボールは、日本独自の9人制もあるが、ここでは6人制について考える。6人制では25点先取のセットを5セットマッチで争うが、5セット目は15点先取となる。バドミントン同様にラリーポイント制でサーブ権がある。

このようなサーブ権に基づきサーブの交代がある形式を定式化すると以下ようになる。チームAがサービスのときAが得点する確率を p_A 、Bが得点する確率を $q_A=1-p_A$ 、BがサービスのときBが得点する確率を p_B 、Aが得点する確率を $q_B=1-p_B$ とする。セットは25点先取なので、 $n=25$ において

考えればよいのであるが、どちらがサーブ権を有するかにより状態が異なる。

まず、得点 $i-j$ になる確率について考える。 $P_A(i, j)$ を得点 $i-j$ になりかつAがサーブ権を有する確率、 $P_B(i, j)$ を得点 $i-j$ でBがサーブ権を有する確率とし、得点 $0-0$ でAのサーブから始まるとする。このとき $P_A(0, 0)=1$ が初期条件となり、得点 $1-0$ となる確率 $P_A(1-0)$ は、最初にAが得点する確率に等しく、 $P_A(1, 0)=p_A P_A(0, 0)=p_A \times 1=p_A$ となる。一般に $P_A(i, j)$ は、Aがサーブ権を有して $i-1$ 対 j の時にAが得点するか、Bがサーブ権を有して $i-1$ 対 j の時にAが得点すると実現するので、

$$P_A(i, j) = p_A P_A(i-1, j) + q_B P_B(i-1, j) \quad (8)$$

となる。 $P_B(i, j)$ についても同様に、

$$P_B(i, j) = p_B P_B(i, j-1) + q_A P_A(i, j-1) \quad (9)$$

となる。また、デュースの取り扱いは、2点先行し

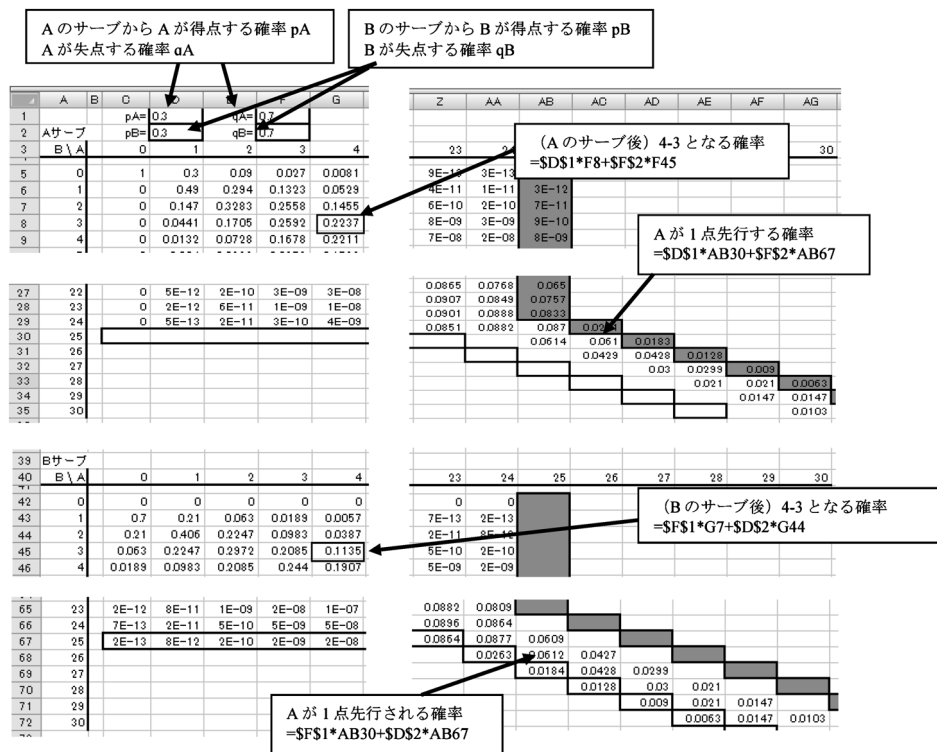


図8 バレーボールのセットで得点 i-j になる確率の表計算の例

た方がセットをとることに配慮して表計算すればよい。これを表計算に反映させると図8のようになる。試合に勝つ確率は5セット目が15点先取となることを考慮した上で、3セット先取として計算すればよい。

得点 i-j から勝つ確率についても同様に、形式的には n 点先取方式が2段階となっていることを利用して表計算できる。すなわち、 $P_{wA}(i, j)$ を得点 i-j で A がサーブ権を有する状態から A がセットを取る確率とし、 $P_{wB}(i, j)$ を得点 i-j で B がサーブ権を有する状態から A がセットを取る確率とすると、A が25点取った状態では A は既に(確率1で)セットをとっているの、境界条件は $P_{wA}(25, 0) = P_{wA}(25, 1) = \dots = P_{wA}(25, 23) = 1$ に、また、A が25点取られた状態で A がセットをとる確率は0なので、最後の得点が B に入ったことに注意すると、 $P_{wB}(0, 25) = P_{wB}(1, 25) = \dots = P_{wB}(23, 25) = 0$ となる。得点 i-j で A がサーブのときの次の得点の状態は、確率 p_A で A が得点して

$i+1$ 対 j で A のサーブとなるか、確率 $q_A = 1 - p_A$ で B が得点して、 i 対 $j+1$ で B のサーブとなる。このとき、それぞれの状態から勝つ確率の関係は、

$$P_{wA}(i, j) = p_A P_{wA}(i+1, j) + q_A P_{wB}(i, j+1) \tag{10}$$

$$P_{wB}(i, j) = p_B P_{wB}(i, j+1) + q_B P_{wA}(i+1, j) \tag{11}$$

となる。これを表計算に反映させると図9のようになる。試合に勝つ確率も3セット先取で5セット目は15点先取であることに配慮して表計算できる。

4. 計算方法のバレーボールの試合への応用

バレーボールは、TV 放映時間内に試合が終わることを主な目的として1999年からサーブ権を有しているチームのみ得点を加算できるサイドアウト制から、サーブ権に関係なく得点を加算できるラリーポイント制に移行している。この移行に当たり、両制度について試合の長さを研究した事例はあるものの、数学的に試合の長さの確率分布を導出した研究

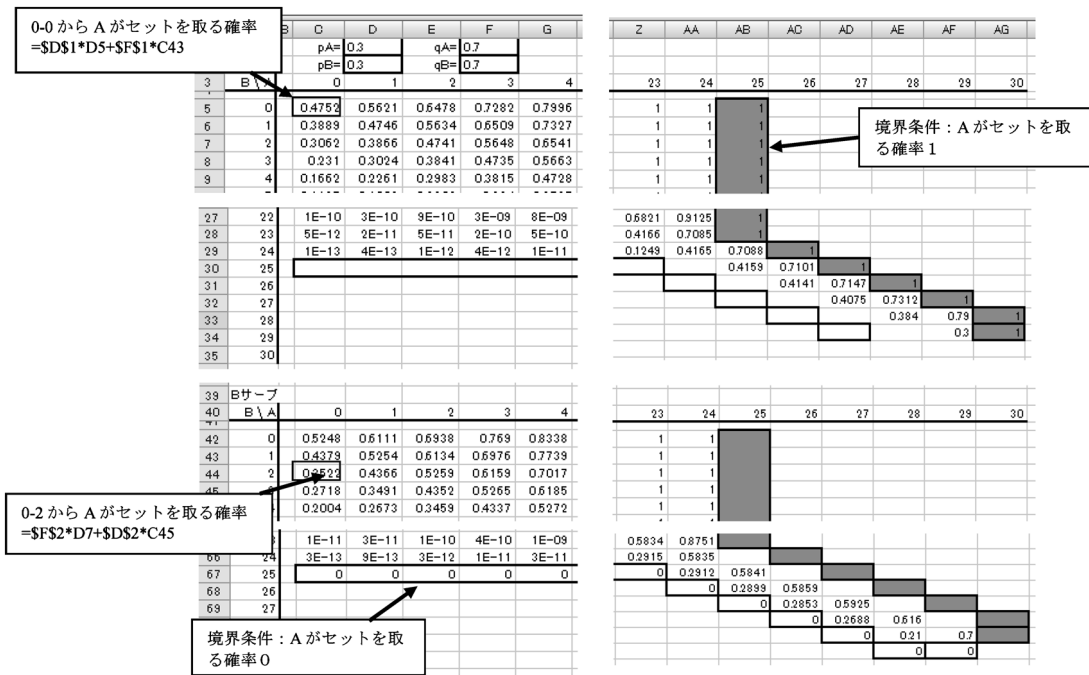


図9 バレーボールで得点i-jからセットを取る確率の表計算の例

はないようなので、ここではn点先取方式の計算の応用例として、両制度について勝つ確率や試合の長さを確率計算し比較してみる。

始めに3.4節に示した得点i-jになる確率の計算方法を利用してラリーポイント制でのセットの長さを計算する。まず、図8でセットが終わった時の得点とそれに至るラリーの回数に着目すると、デュースにならない時は25対kないしはk対25でセットは終了し ($k \leq 23$)、サーブから得点が決まるまでを1プレーとした時のプレー回数は25+k回となる。デュースになった時は、(k+2)対kないしはk対(k+2)で終了し ($k \geq 24$)、プレー回数は2k+2回となる。各々の確率は、図8内での該当部分(図中の太枠セル)を利用して計算できる。図8では両チームともサービスから得点する確率を0.3とした場合 ($p_A=0.3, p_B=0.3$) について計算しており、プレー回数を横軸その確率を縦軸として図10のように確率分布として表現でき、平均プレー回数は47.0回で標準偏差が4.8回となる。

5セットマッチで考えると、セットカウント3-0で終わる確率は0.107となり、この時の試合の長さ

は25点先取3セット分となるので、確率変数の期待値の和の公式などを用いると平均プレー数は140.9回で標準偏差は8.3回と計算できる。セットカウント3-1で終わる時などの他の場合についても起こる確率とセット合計の長さを同様に計算していくと、試合の長さは平均プレー回数が185.7回で標準偏差が23.4回となる。(これは、5セット目が15点先取であることを考慮しており、ちなみに5セット目は平均プレー回数は28.1回で標準偏差が4.7回となる。)

次に、サイドアウト制での試合の長さについて考える。サイドアウト制の場合は、サーブを行わないときにラリーに勝ってもサーブ権を獲得するだけで得点は変わらない。計算のためには、セット開始からm回目のプレーが終わった時にAがサーブ権を有し得点i-jとなる確率を $P_{mA}(i, j)$, Bがサーブ権を有し得点i-jとなる確率 $P_{mB}(i, j)$ とし、得点0-0はAのサーブで始まるとする。初期条件は、 $P_{0A}(0, 0) = 1$ となり、1回目のプレーが終わった時にAがサーブ権を有し得点1-0となる確率 $P_{1A}(1-0)$ は、Aが得点する確率に等しく、 $P_{1A}(1, 0) =$

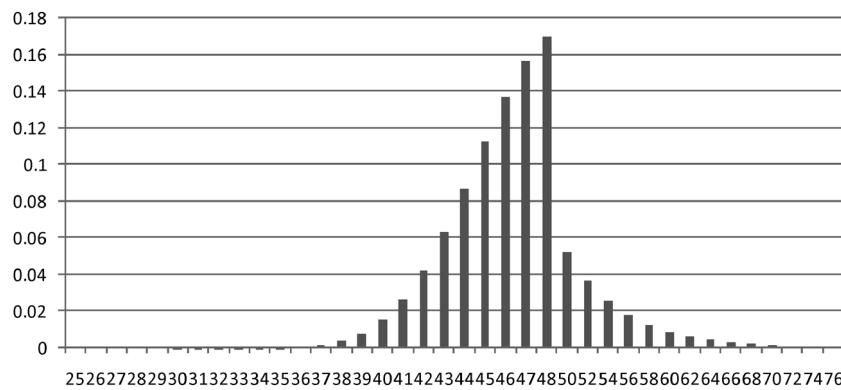


図10 ラリーポイント制でのセット終了までの回数の確率分布

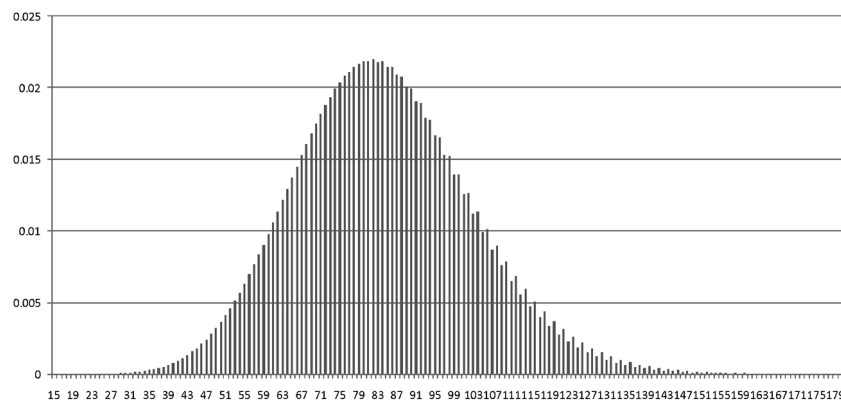


図11 サイドアウト制でのセット終了までの回数の確率分布

$p_A P_{0A}(0, 0) = p_A \times 1 = p_A$ となる. 同様に考えていくと, $P_{mA}(i, j)$ は, $m-1$ 回目のラリーが終わった時には A がサーブ権を有する $i-1$ 対 j の状態から A が得点するか, B がサーブ権を有する i 対 j の状態から A がサーブ権を奪うと実現するので,

$$P_{mA}(i, j) = p_A P_{m-1A}(i-1, j) + q_B P_{m-1B}(i, j) \quad (12)$$

となる. $P_{mB}(i, j)$ についても同様に,

$$P_{mB}(i, j) = p_B P_{m-1B}(i, j-1) + q_A P_{m-1A}(i, j) \quad (13)$$

となる. 詳述はしないがこれらの式に基づき表計算することができる. セット終了時は 15 対 k ($k \leq 13$) のとき A がセットを取るがその確率とその時のプレー回数 m を, また k 対 15 のとき B がセットを取るがその確率とその時のプレー回数 m も求めることができる. (ただし 14-14 以降はデュースになる

と考えて計算に配慮する必要がある. ここでは 14-14 以降は 2 点先行ないしは 17 点先取にて計算している. 以下の試合に勝つ確率についても同様である.) ラリーポイント制の場合と同様に, プレー回数を横軸, その確率を縦軸として図 11 のような確率分布が得られる. なお, 図 11 では両チームともサービスから得点する確率を 0.3 とした場合 ($p_A = 0.3, p_B = 0.3$) について計算しており, 平均プレー回数は 83.8 回で標準偏差は 19.2 回となる. これを基に 5 セットマッチについて試合の長さを計算すると, 平均ラリー数 320.1 回で標準偏差 90.1 回となる.

なお, 試合に勝つ確率については, ラリーポイント制では, 3.4 節で述べた方法により計算できるが, サイドアウト制での試合に勝つ確率については, 例えば (12) (13) 式を利用してセット終了時に 15 対 k ($k \leq 13$) で A がセットを取る確率を計算し, k

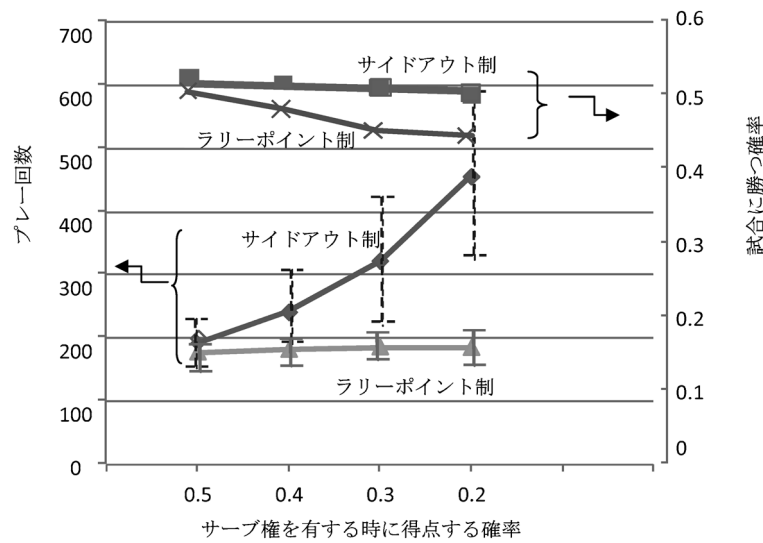


図12 プレー回数と試合に勝つ確率

について積算すればよい。(ただし14-14以降の扱いを配慮する必要がある。)計算結果によるとラリーポイント制ではサーブ権を最初に有する側が確率計算上は不利となるがサイドアウト制では有利となる。例えば、両チームともサーブから得点する確率が共に0.3で互角のとき ($p_A = p_B = 0.3$ としたとき)、最初にサーブ権を有するチームがセットを取る確率はラリーポイント制では0.475となるがサイドアウト制では0.513となる。試合に勝つ確率を5セットマッチとして計算すると、(1セット目に最初にサーブ権を有したチームが5セット目でも最初にサーブ権を有するとした場合) 試合に勝つ確率は、ラリーポイント制では0.449となるがサイドアウト制では0.505となる。

両チームともサーブから得点する確率が共に0.5, 0.4, 0.3, 0.2で互角のとき、試合最初にサーブ権を有するチームが試合に勝つ確率と試合の長さについて、ラリーポイント制とサイドアウト制で比較した結果を図12に示す。計算上は、試合に勝つ確率は、最初にサーブ権を有するチームがラリーポイント制では不利になり、特に実力が互角のときでも、サーブから得点する確率が低い程、最初にサーブするかどうかの影響が大きくなることが数値として示される。また試合の長さについても、サーブから得点する確率が低くなるとラリーポイント制では、試合の

長さへの影響は少ないが、サイドアウト制では試合が長くなる上、ばらつきも大きくなることがわかる。

なお、テニスや卓球ではサーブ回数が両選手(チーム)で同等になるので、最初にサーブを行うかどうかで計算上は有利不利がでないが、サーブ権のあるバレーボールなどでは計算上は影響している。しかしながら、今回の計算では得点確率が試合中は一定であると仮定しているが、現実にはサーブする選手がローテーションなどで変わるため得点確率は一定とは言えないので、戦術上は最初にサーブする方が必ず不利になるとは限らない。

ちなみに、藤島³⁾は一例として試合時間66分で161回プレーしていることを報告している。これを参考にして、仮に1回のプレーが0.4分程度 ($\div 66/161$) として試合時間を推定するならば、サーブから得点する確率が双方とも0.3のときは、ラリーポイント制では概ね74±9分で終了するが、サイドアウト制の場合は129±36分となる。

5. 結 言

以上、数学モデルを用いて、各種の球技の試合について“なる確率”と“勝つ確率”を計算する手法を提示し、汎用の表計算ソフトにて計算できることを示した。また、応用例として、バレーボールでのラリーポイント制とサイドアウト制での試合におけ

る試合に勝つ確率と試合の長さについて計算結果を示した。

今回は、 n 点先取方式の球技の試合に限って述べたが、球技でもサッカーやハンドボールなどの時間内で得点の多寡を競う試合についても、同様の手法を用いて確率計算することが可能であるか今後検討を進めていきたいと考えている。

なお、今回は数式の「コピー」「貼り付け」により表計算したが、Excel VBA を利用することで、野球などの複雑な競技についても、試合の経過を確率計算するプログラムを作成することは可能である。VBA の利用については今回割愛したが、VBA による簡単なプログラミングも導入して、より複雑な試合形式をもつ球技についても今後適用を試みたいと思っている。

文 献

- 1) 遠藤俊郎 (1986) バレーボールのゲーム分析 — オペレーションズ・リサーチの手法を利用して—。体育の科学, 36, 693-698.
- 2) 遠藤俊郎, 志村栄一 (1992) バレーボールのゲーム分析に関する基礎研究 (2) —リアルタイム処理システムの開発—。スポーツ方法学研究, 5, 115-125.
- 3) 藤島みち (2000) バレーボールの「サイドアウト制とラリーポイント制」の比較について: 大学女子の試合より。夙川学院短期大学研究紀要, 24, 97-109.
- 4) 宮川雅巳, 鳩山由紀夫 (1980) 強さと試合形式の合理性。オペレーションズ・リサーチ, 10, 649-657.
- 5) 小川 宏, 黒後 洋 (2005) ラリーポイント制によるバレーボールゲームの勝利確率について。バレーボール研究, 7, 7-13.
- 6) Sadvskii, L.E. and Sadvskii, A.L. (1993). *Mathematics and sports, Mathematical World Vol. 3*, Providence, RI, American Mathematical Society (Translated from the Russian by Makar-Limanov, S.).
- 7) 大修館書店編 (2008) 最新スポーツルール百科 2008, 東京, 大修館書店.
- 8) Schutz, R.W. (1970) A mathematical model for evaluating scoring systems with specific reference to tennis, *Research Quarterly*, 41, 553-561.
- 9) 竹内啓・藤野和建 (1988). *スポーツの数理科学*, 東京, 共立出版, 91-95.
- 10) 吉田清司 (1998) バレーボールのシミュレーション —ラリーポイント制ゲームの予測—。専修大学社会体育研究所報, 46, 31-40.

(平成20年10月7日 受付)
(平成21年2月6日 受理)